4. Integrabilidade

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Lichtenberg, 1992, Percival, 1989, Lowenstein, 2012)

IFUSP

2024

Integrabilidade

- Sistemas lineares são integráveis.

- Sistemas não lineares com um grau de liberdade são integráveis.
- Sistemas não lineares com mais de um grau de liberdade podem ser ou não integráveis.

Sistema com um grau de liberdade (autônomo)

- Integrável

H independente do tempo, com um grau de liberdade

$$H(p, q) = E$$

$$p = p(q, E) \qquad dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p}$$

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\partial H/\partial p}$$

A função a ser integrada depende apenas de q, p e podemos escrever p em função de q.

Oscilador Harmônico
(equações de movimento lineares)

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

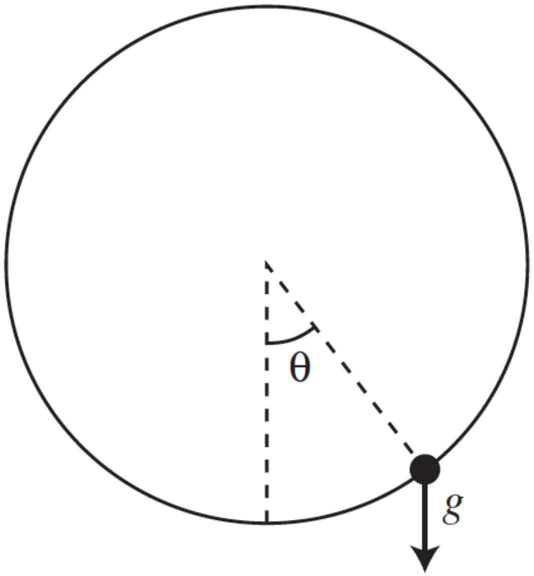
Equações de hamilton (lineares)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$$

Solução

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

Pêndulo Simples (Lowenstein, 2012, 1.5.2)
(Integrável)



Massa m = 1,   raio do circulo l = 1

Lagrangian:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + g\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}$$

Hamiltoniana

$$H(\theta, p_\theta) = \dot{\theta}(p_\theta)\, p_\theta - L(\theta, \dot{\theta}(p_\theta)) = \frac{1}{2}p_\theta^2 - g\cos\theta$$

H = E

Equações de Hamilton

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2}p_\theta^2 - g\cos\theta$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

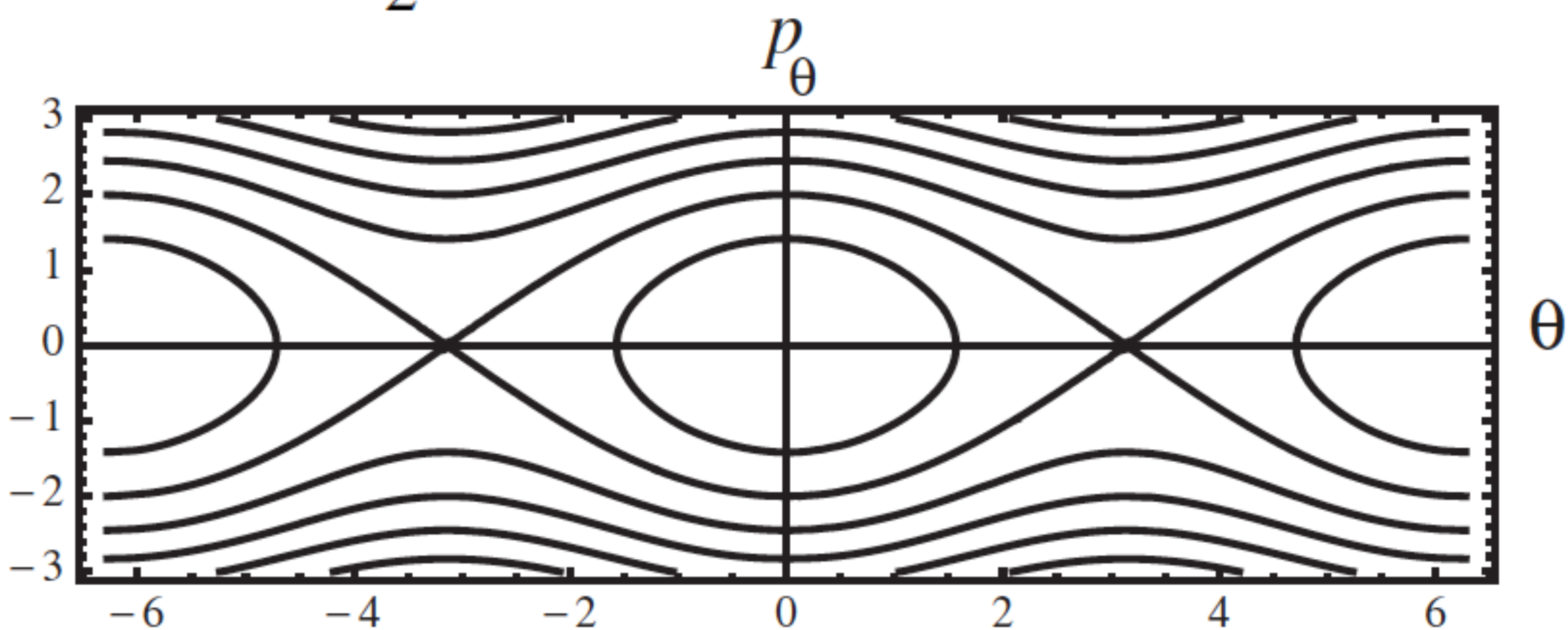
$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\dot{\theta} = p_\theta,$$

$$\dot{p}_\theta = -g\sin\theta$$

Espaço de Fase

$$H(\theta,\, p_\theta) = \frac{1}{2}p_\theta^2 - g\cos\theta = E \qquad -g \le E < \infty$$



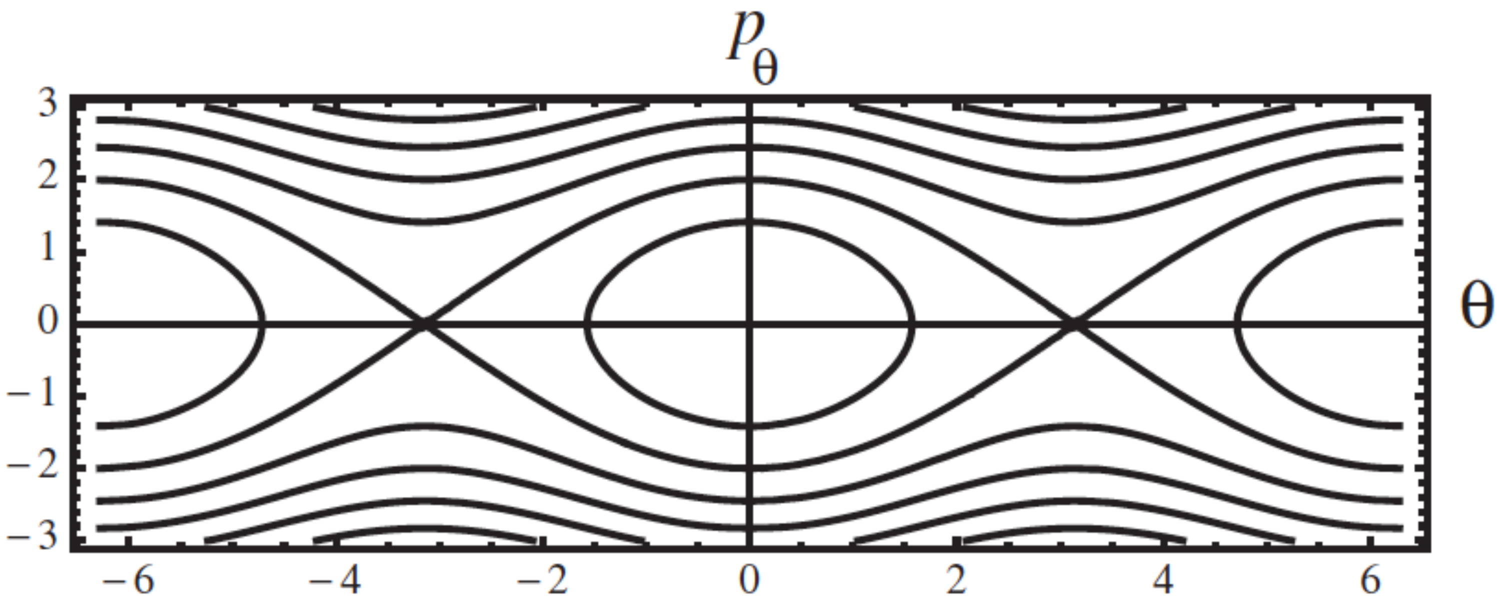
$E = -g$ Ponto de equilíbrio estável

$E = +g$ Ponto de equilíbrio instável

Equação da separatriz

$E < g$ Libração

$E > g$ Rotação



$E = +g$ ➔ $p_\theta = \pm 2\sqrt{g}\cos(\theta/2)$

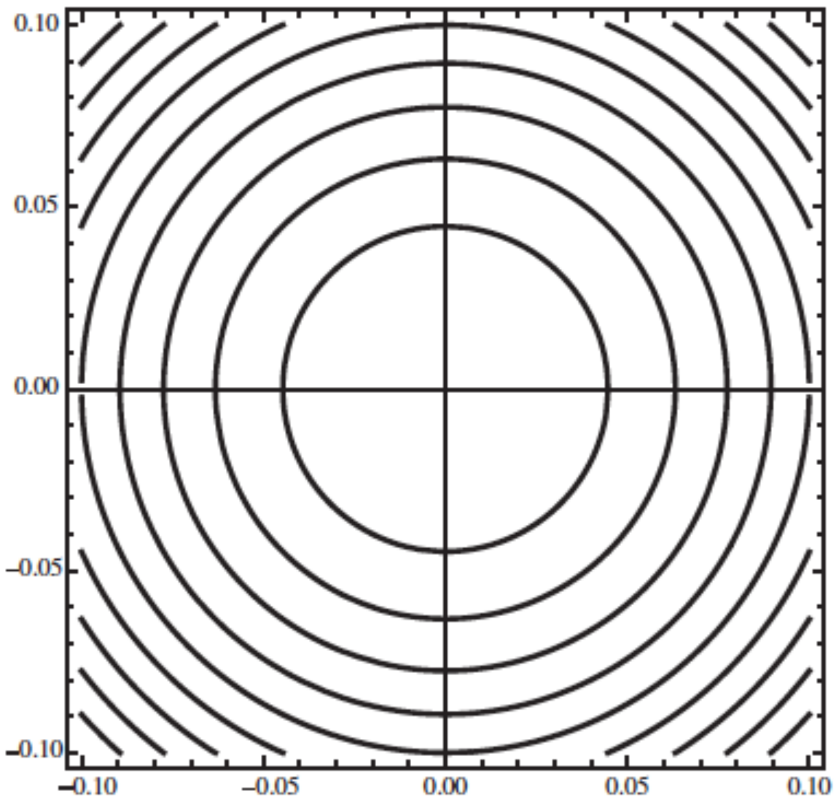
Equação da separatriz

Oscilador Harmônico (ângulos pequenos)

Em torno do ponto estável

$$H \sim \frac{1}{2}(p_\theta^2 + g\theta^2)$$

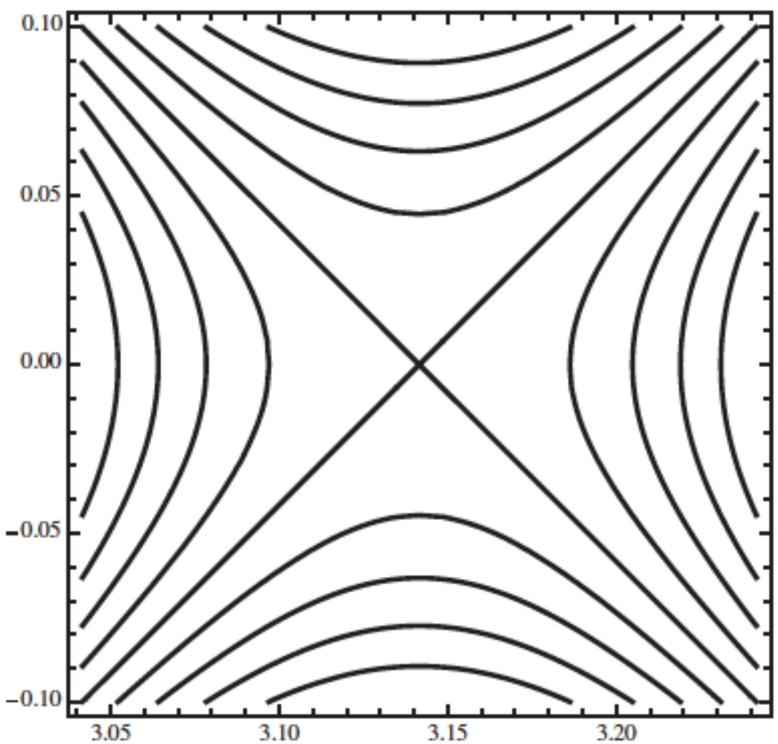
Oscilações com frequência $\omega = \sqrt{g}$



Amplificação do espaço de fase

Movimento de repulsão em torno do ponto instável

$$H \sim \frac{1}{2}(p_\theta^2 - g(\theta - \pi)^2)$$



Amplificação do espaço de fase

Solução Exata para o Pêndulo Simples

Introduzimos a variável z e o parâmetro k

$$z = \frac{1}{k}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad k = \sqrt{\frac{E+g}{2g}}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = E \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^2 = g(1-k^2z^2)(1-z^2)$$

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{g(1-k^2z^2)(1-z^2)}}$$

Para movimento de libração

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{g}} F(\sin^{-1} z | k^2)$$

F: função elíptica de primeira ordem e $k^2 \in [0, 1)$

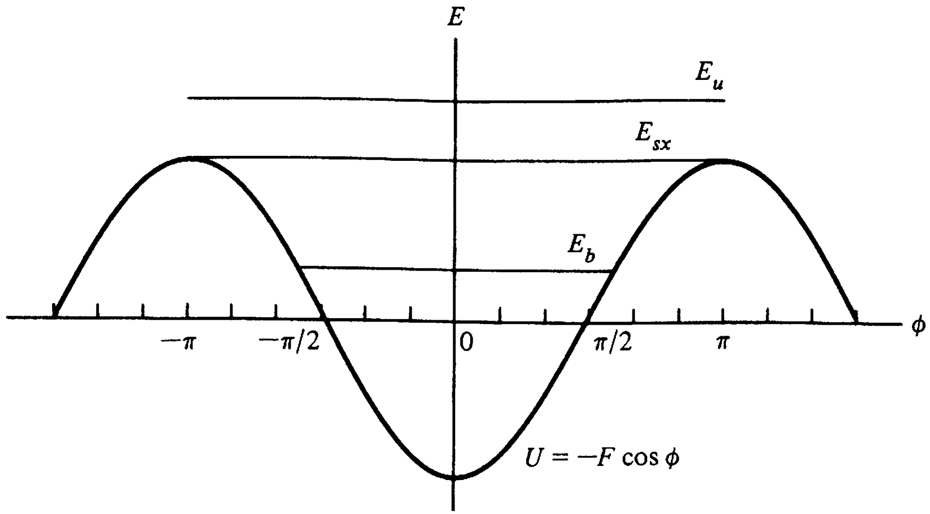
Escrevendo z (t) $z = \mathrm{sn}(\sqrt{g}(t - t_0), k^2)$

Para $\theta(0) = 0, \; p_\theta(0) = \sqrt{2E}$

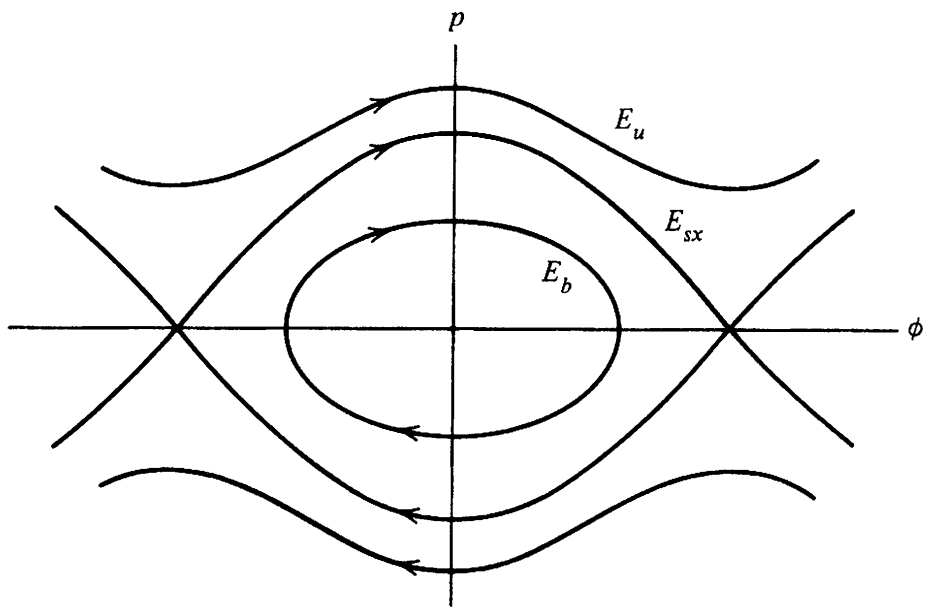
$\theta(t) = 2 \sin^{-1}(k \,\mathrm{sn}(\sqrt{g}\, t, k^2))$ sn é a integral elíptica de Jacobi

Período da libração $$T = \frac{4}{\sqrt{g}} K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{4}{\sqrt{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right)$$

Período do pendulo T= T (E)



Perfil do potencial

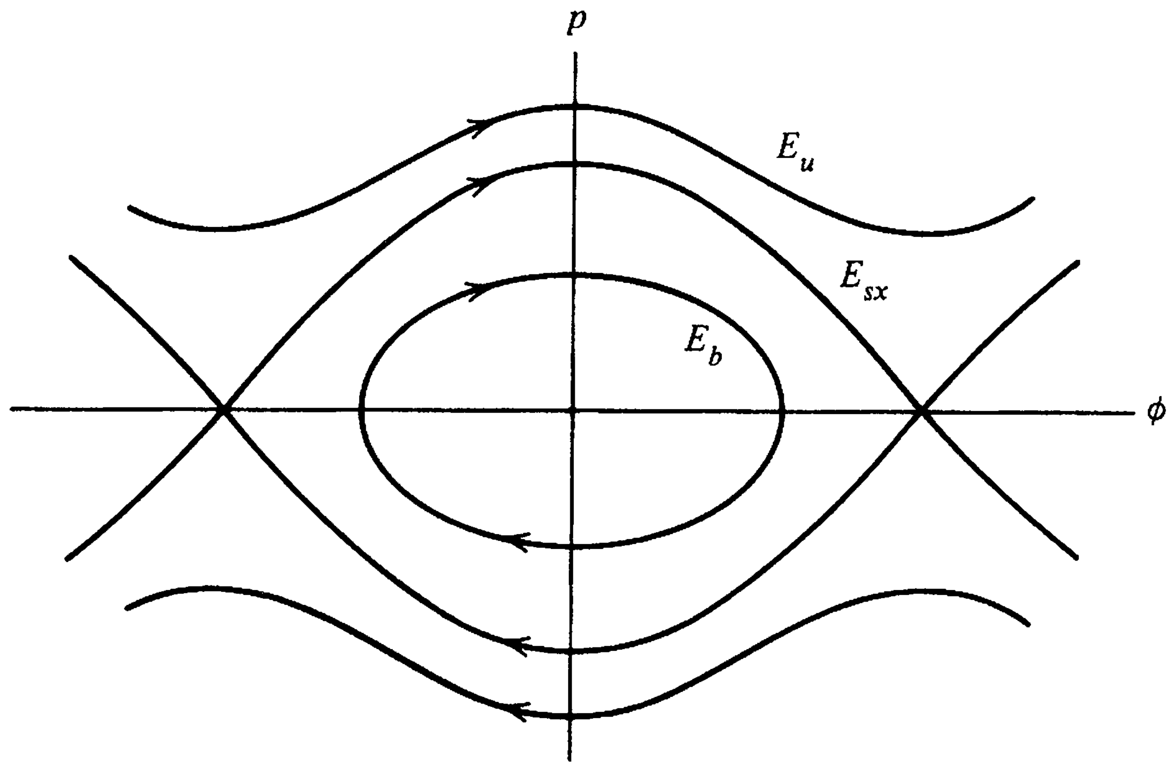


Espaço de fase

Cada trajetória com um valor de energia
Uma constante de movimento (constante ao lono da trajetória)

$$p = p(q, E)$$

Essa é a equação da trajetória para cada E .



A energia da separatriz tem um valor específico E_{sx}.

Equações de Hamilton

$$\dot{p} = -F \sin \phi$$

$$\dot{\phi} = Gp,$$

$$F = mgh, \ G = 1/(mh^2)$$

Equação de uma trajetória de libração

$$H = \tfrac{1}{2}Gp^2 - F \cos \phi = E$$

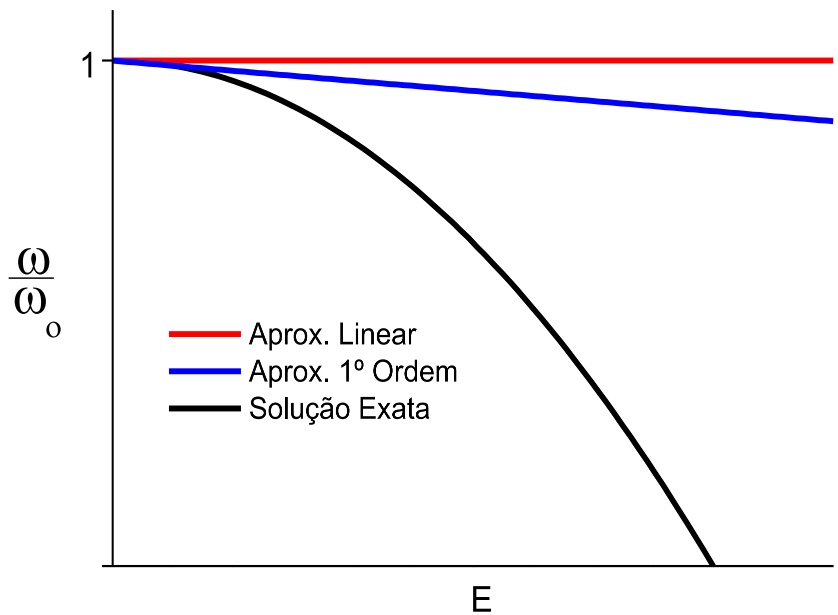
$$T = \frac{1}{(2G)^{1/2}} \oint \frac{d\phi}{(E + F \cos \phi)^{1/2}}$$

Período da trajetória

Freqüência em função da energia

Aprox. linear: $(\operatorname{sen}\theta \approx \theta) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = cte.$

Aprox. 3º Ordem: $(\operatorname{sen}\theta \approx \theta - \frac{1}{3!}\theta^3) \Rightarrow \omega = \omega_0(1 - \frac{E}{8\omega_0^2})$



Integrar sistemas com N graus de liberdade: temos a equação

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1} = \frac{dq_2}{\partial H/\partial p_2} \cdots = \frac{dq_N}{\partial H/\partial p_N}$$

Cada função do denominador teria que depender
da correspondente coordenada q_i

Sistemas (não lineares) podem ser integráveis ou não. Se for integrável

podemos tentar esse procedimento e integrar.

Sistema Integrável com N graus de Liberdade

- N graus de liberdade e N constantes de movimento.
- Podemos fazer uma transformação canônica para obter

  N momentos p_i como constantes de movimento.
- Nesse caso, podemos integrar as equações de Hamilton

  e obter a evolução das variáveis dinâmicas q_i, p_i

Constantes de Movimento

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Se $\partial H/\partial q_i = 0$ ➔ $dp_i/dt = 0$

$$p_i = \alpha_i = \text{const.}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i$$

$\partial H/\partial \alpha_i$ É função de α_i ➔ $q_i = \omega_i t + \beta_i$

N graus de liberdade com N constantes de movimento p_i:
o sistema é integrável.